

しなやかさとともに、かたちあり——弾性と幾何



佐野 友彦

スイス連邦工科大学ローザンヌ校 (EPFL)
tomohiko.sano@epfl.ch



和田 浩史

立命館大学理工学部
hwada@fc.ritsumeai.ac.jp

われわれの身のまわりには、大小さまざまな棒 (rod) や板 (plate) 状のものがあふれている。これらは薄い構造または細長い構造と総称される。ロープ、植物のつる、パスタ、海底ケーブル、リボン、ピンポン球、卵の殻などはその一例である。薄い構造の特徴は、その「しなやかさ」にある。薄い板は小さな力によって容易に大きく曲がりねじれる。ここでは、幾何学と力学が密接に結びついている。力学分野は G. Galilei の材料力学の研究にはじまり、今日では完成された学問分野という印象がある。しかし、デジタル加工技術の急速な発展と普及によって、力学は魅力的な最先端分野として現代に甦った。今日、力学の研究では、負のポアソン比をもつメタマテリアルをはじめとして、新しい概念が次々に生み出されている。とくに、座屈不安定性のように、構造のもつ対称性が破れる過程を「機能の発現」とみなす考え方が浸透しつつある。

薄い構造はお互いに力を及ぼしあうことで新たな機能を生み出す。植物のつるは風に飛ばされないように棒に巻きつき、外科医は糸を結んで傷を縫合する。これらの過程では摩擦が重要な役割を果たすため、従来の境界値問題とは異なる趣きがある。曲がった板のかたちは境界条件によって決まるが、摩擦の作用のもとでの安定性を考えるには、かたちをあらかじめ決めておく必要がある。つまり、通常の境界値問題とは異なり、「かたちと境界条件が同時に決まる」問題を扱わねばならない。われわれは理論、実験、数値計算を総合的に駆使してこの問題にアプローチし、摩擦によるかたちの安定性を議論する枠組みを提案している。

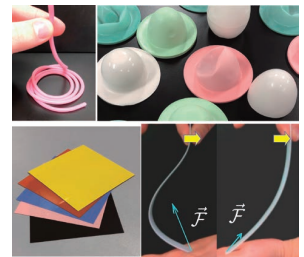
薄い構造が示す動力学の代表例は「飛び移り座屈」(スナップ座屈)とよばれる転移現象である。飛び移り座屈は、食虫植物であるハエトリグサがすばやく虫を捕らえるときのような、植物が俊敏に動くための仕組みとしても注目を集めている。スナップは、薄板を両手でたわませ、そのたわんだ方向を逆転させることで容易に再現することができる。われわれは、板やリボンをあらかじめ幾何学的に拘束し、境界条件を変化させることで起こる飛び移り座屈の性質を明らかにした。細長いリボンを手にとり、これをその長軸が半円を描くように拘束する。両端を同じ向きにねじると、あるねじり角度でリボンの表と裏が反転しスナップする。さまざまな硬さや厚さのリボンを使ってこの現象を再現してみると、操作の単純さに反して、じつに豊かな現象が内在していることがわかる。

薄い構造が示すしなやかなふるまいは、フックの法則(線形弾性論)と剛体回転(幾何学)によって記述される。しかし、同じ材質と寸法でも境界条件によってとりうる形は全く異なる。さらに、棒状のものは結んだり編んだりすることで、板状のものは折ったり切ったりすることで、それらの単純な構造に驚くべき多彩な機能をもたせることができる。身近なかたちのしなやかさについて考察することは、いっけん複雑に見える生物力学現象をよりよく理解したり、それらにインスパイアされた生体規範材料をデザインすることにも繋がる。手元にあるケーブルや紙切れを曲げたりねじったりしてみると、まだ見ぬ構造のしなやかさに出会うことができるかもしれない。

—Keywords—

薄い構造物:

1 または 2 方向の広がりが残りの方向に比べて十分に小さく、内在的なスケール分離が成立するような(定まった)形状をもつ構造を薄い構造物(thin structure)(板やシエル)とか細長い構造物(slender structure)(棒やリボン)と総称する(下図)。



フック弾性論:

力を加えると変形し、その力を除くと元の形を完全に回復する性質をもつ物体を弾性体とよぶ。とくに、弾性体内部に発生するひずみと応力の関係(構成関係式)が線形則をみたすとする理論的枠組みを、フック弾性論(Hookean elasticity)または線形弾性論とよぶ。

座屈不安定性:

ある構造が、特定の外力や境界条件のもとで初期の形状の安定性を失って、より安定な別の形状にうつる現象を、座屈転移とか座屈不安定性とよぶ。平らな板の両端に平行で逆向きの力を加えると、力が小さいうちは面内で圧縮されるが、力がある大きさを超えると板はたわみ、曲がる。これはオイラー座屈とよばれる。

1. はじめに

「物体はどのようにしてそのかたちを変えるのだろうか？」この問いは力学（と物理学）における、もっとも基本的な問いのひとつである。19世紀にその大枠が完成した力学分野は、20世紀には物理学の垣根を超えて、構造力学、材料力学、バイオメカニクス、地球物理学などへその活躍の場を大きく広げていった。¹⁻⁷⁾ 長い研究の歴史をもつ古典力学の分野において、今なおどういった基本的な問題が残されているのだろうか？

物体が大きくそのかたちを変えるには、物体に力学的あるいは幾何学的なやわらかさが備わっていなければならない。前者は物体の剛性に、後者はその薄さや細さに、やわらかさの起源を求めることができる。材質の剛性（弾性）は、ヤング率とよばれる物性定数によって表現される。金属、コンクリート、木材などは硬いため、大きく変形させようとする破断したり塑性変形したりしてしまう。一方、ゴム、ゲルや生体組織は柔らかく、容易に大きく変形し、外力をとり去るともとの形を回復する。これらの力学的に非線形なふるまいは、しばしば材質に依存し、それらを理解・予測することは一般に大変むずかしい。対照的に、物体の薄さや細さ、すなわちその幾何構造は、材質によらずに物体の大変形を可能にする。プラスチックの塊を壊さずに曲げることは難しいが、プラスチックの薄板ならば、小さな力で容易に大きく曲げることができる（図1）。金属であれ、ガラスであれ、ゴムであれ、このことはつねに事実である。一般に、薄く細い物体は曲げやねじりに対して「しなやか」に、そして可逆的に変形する。薄い構造が大きくたわんでも、物体内部に生じるひずみは小さくとどまり、フック弾性則がよい力学的記述を与える。つまり、構造の薄さのおかげで、われわれは「力学的な非線形性」という厄介な問題を当面の関心から切り離すことができる。少々直感に反するかもしれないが、より薄く、より大きく変形するほど、線形弾性論はうまく作用するのである。しなやかな枝、しなやかな髪、しなやかな身体、しなやかな心。「し

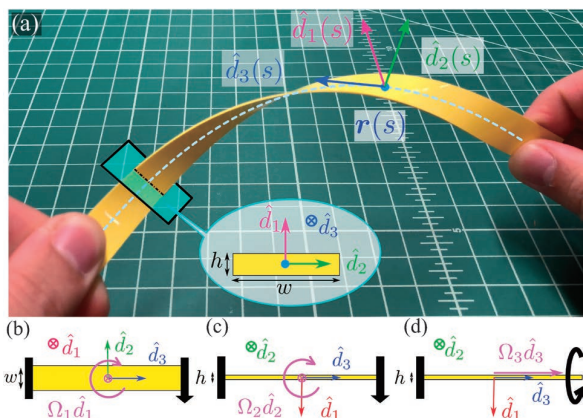


図1 (a) 厚み h 、幅 w のリボンの曲げ (bending) およびねじれ (twisting) 変形の様子と Cosserat frame ($\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3$) の定義。(b), (c), (d) 曲率 Ω_1, Ω_2 およびねじれ率 Ω_3 が示す回転方向と Cosserat frame との関係を示した図。

解説 しなやかさとともに、かたちあり

なやか」とは「弾力にとんでたわむさま」を指す。「柳に雪折れなし」ということわざが言うように、一般に柔らかくしなやかなものは、堅いものよりも、よく耐え丈夫である。

細い構造は、柱、アーチ、ケーブル、植物のつる、繊毛や鞭毛、DNA に至るまで、幅広い長さスケールにわたって遍在する。これらにとって、「しなる」、「たわむ」、「ねじれる」といった変形は、本来のかたちがもつ対称性を失う道筋であり、専ら「避けるべき現象」と信じられてきた。ところが、このような大変形や不安定化を「新たな機能性の発現」とみなすパラダイムシフトを経て、ここ数十年で力学分野は華々しく現代科学に甦った。⁸⁻¹⁰⁾ 背後には、3D-4D プリントをはじめとするデジタルベースの製作・加工技術の進歩と普及がある。本稿では、しなやかな変形をつうじて発現する機能について、われわれが携わってきた研究をベースに解説する。

2. 棒と板の弾性理論

薄い構造物は大きくしなるが、材料内部の応力とひずみの関係は線形の法則、つまりフック則で十分である。ものが大きく曲がりねじれる現象における非線形性は「物体の各断面が局所的に回転する」という幾何学的な性質をつうじて現れる。本節では、細長い棒やリボンのように、1次元的に広がった構造に焦点をあて、そのしなやかさを記述する理論の枠組みを解説する。^{2-5, 7, 11, 12), *1}

2.1 薄いものは大変形してもひずみは小さい

固体に力を加えると、その力（外力）と、各要素がもとの配置に戻ろうとする復元力（内力）がつりあった状態が実現する。外力を取り除くと、もと同じ配置に戻る性質を弾性と呼び、そのような性質をもつ物体を弾性体と呼ぶ。^{*2} したがって、われわれは基準状態からの変位を考えることで弾性体の変形を記述できる。3次元弾性体の任意の1点を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とする（図2(a) 左側）。外力によって、変形前に \mathbf{r} の位置にあった点は、 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ に移る。 \mathbf{r}' は変形前の位置 \mathbf{r} の関数として表すことができる： $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r})$ （ラグランジュ記述）。物体の配置の変化は「変位ベクトル」 $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'(\mathbf{r}) - \mathbf{r}$ によって表される。物体の内部変形は、隣りあう2点間の距離がどのように変化したかを表す「ひずみ（テンソル）」によって表現される。「ひずみ」は形状変形の程度を表す無次元量である。長さ L の細い棒の全長が L' に変化したならば、棒の各点に発生するひずみ ϵ は $\epsilon = (L' - L)/L$ である。

薄いものが大きくたわむと、変位は大きい^{*3}がひずみは小さいという状態が実現される。このことをみるために、長さ L 、厚さ $h (\ll L)$ の薄い板の左端を地面に対して水平に固定し、これが自重によって曲げられた状況を考える

*1 なお、本節はやや専門的な内容を含むが、ここを飛ばして3節から読んでも差し支えない。

*2 流体は、外力を取り去っても、もとの状態に戻らない系の典型例である。

*3 例えば棒の全長 L と同程度に大きい。

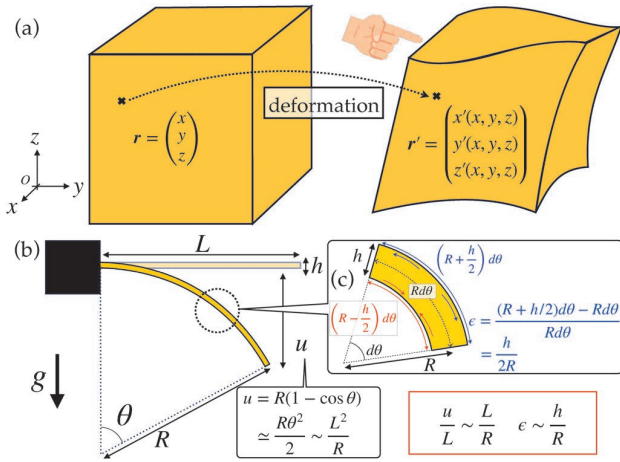


図2 (a) 弾性体の変形の記述. 変形前に位置 r にあった物質中の一点は変形によって r' に変化する. 変形後の点の位置は変形前の位置を指定すれば一意に定まる. (b) 重力下にある全長 L , 厚さ h の薄板の曲げ変形. 自重によって曲率半径 R の曲げ変形が生じている. 自由端の典型的な変位 u と材質内部に生じる典型的なひずみ ϵ がしたがうスケーリング則. (c) 弧状に変形した板の拡大図. 弧の内側と外側はそれぞれ圧縮 ($Rd\theta \rightarrow (R-h/2)d\theta$) と伸長 ($Rd\theta \rightarrow (R+h/2)d\theta$) をうける.

(図2(b)). たわんだ板の曲率半径を $R (=L/\theta)$ とすると, 幾何学的な考察より, 自由端の変位は $u = R(1 - \cos \theta) \sim L^2/R$.^{*4} 角度 $d\theta$ の範囲にある板の側面を拡大してみると図2(c)のようになる. 板の外端(青)と内端(赤)はそれぞれ伸長と圧縮を受けるので, その間には伸長も圧縮もない中心線(点線)がある. その要素の長さは $Rd\theta$ であり, 外端(青)と内端(赤)に沿う要素の長さはそれぞれ $(R+h/2)d\theta$ と $(R-h/2)d\theta$ とかける. これより $\epsilon \sim h/R$ のオーダーのひずみが板の上下面に生じることがわかる. 板がたわむと $R \sim L$ であるから, ひずみの小ささは, もの薄さ ($h/L \ll 1$) に起源をもつことが確認できる.^{*5} 物体のひずみに伴って物体内部の各点は互いに押し合ったり引っ張りあったりして元の配置を回復しようとする. 単位面積当たりのこのような力を応力というが, ひずみが小さい場合, 応力とひずみは線形の構成関係式(フック則)をみだす.

2.2 非線型性はどこへいったのか?

では, 板の曲げやねじりのようにあきらかに非線形なふるまいは, 線形弾性論からどのように現れるのだろうか? もう一度, 図2(b), (c) をみると, それは板の各断面が隣りあう断面に対して(ほぼ)剛体回転することから現れることがわかる. 通常, 3次元の弾性体の変形を議論するさい, 境界は無限に遠くにあるか拘束されている. 今の場合, それとは事情が大きく異なる. 板がたわむと, 板の上下の境界(表と裏の面)は, 変形とともに回転する. 材料の分

*4 これは $\theta = L/R \ll 1$ を仮定した近似であるが, 実際には $R \sim L$ 程度までよい見積もりを与える.

*5 フック則は $\epsilon \sim h/R \sim O(1)$ のときに破綻する. この条件は, 薄膜がその厚みと同程度の半径に曲がる, つまり薄膜に「折れ目」がつく場合を示唆する. 折れ目の領域では線形弾性論が適用できない, という主張は驚くに当たらないが, 折れ目以外のすべての領域では依然としてフック弾性論が適用できる, という事実は強調に値する.

布する厚み方向には, ひずみは小さく留まるけれども, いまはそれを議論すべき座標系ごと回転するのである. そして, 中心線に沿うこの座標系の回転率が, 板の(代表的)曲率に他ならない. 物理学の多くの分野でよく知られているように, (有限の)回転変換は本質的に非線形である. 薄い構造物の力学では, この「幾何学的非線形性」が本質的な役割を果たす. その意味で「しなやかさの力学」は, 力学的な非線形性が主役を演じる3次元の超弾性論やソフトマター力学の研究とは, 質的に異なる.

2.3 かたちを表現する

板や棒の問題を3次元の弾性論の枠組みで考えるかぎり, 非常に難しい問題になる. しかし, 断面の広がり是全長に比べて十分小さいため, 棒の形状は伸縮を生じない中心線の形状で代表することができる. そこで中心線の曲げやねじれを表現するために, Cosserat frame と呼ばれる局所直交座標系 ($\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3$) を導入する^{*6} (図1). 中心線の位置ベクトル r をその弧長 (arc length) s の関数として表現する: $r = r(s)$. 接線ベクトルを $\hat{d}_3 = \partial r / \partial s$ と書くと, s が弧長であるという定義から \hat{d}_3 はつねに単位ベクトルである (図1(a)). 残りの2つの基底ベクトル \hat{d}_1, \hat{d}_2 は棒の断面内にどのような方向にとってもよいが, ふつうその断面の主軸方向にとる (図1(a)).^{*7} Cosserat frame が棒の中心線に沿って移動するとき, その動きは

$$\hat{d}_a' = \Omega \times \hat{d}_a, \quad \Omega = \Omega_a \hat{d}_a. \quad (1)$$

という回転の方程式によって記述される.^{*8} 'は s に関する微分を表す. ベクトル Ω は Darboux vector とよばれる. 仮に s を「時間」とみなすならば, ベクトル Ω は「角速度ベクトル」に相当する. 各成分 $\Omega_a(s)$ は対応する各軸 \hat{d}_a まわりの回転率なので, Ω_1, Ω_2 は棒の曲率 (curvature), Ω_3 はねじれ率 (twist) を表す (図1(b)-(d)). たとえば Ω_3 は接線ベクトル \hat{d}_3 のまわりに (\hat{d}_1, \hat{d}_2) が回転する「速さ」を表すので, これは「ねじれ率」である. $\Omega_a (a=1, 2, 3)$ がわかれば, 式(1)より, 棒のかたちは全体の剛体回転と並進を除いて一意に決まる.

棒の力学状態を決定するために, 棒断面内の完全な応力分布は必ずしも必要ではない. 棒を, 連続する微小長さを

*6 空間曲線を記述する上でよく知られた方法は Frenet-Serret (FS) 座標系である. しかし, われわれが考える曲線は, 実際には小さいけれども断面方向に物理的な広がりをもつ構造である. このような棒の形状を正確に記述するには, じつは1本ではなく2本以上のFS空間曲線を必要とする. これは, 棒が自分の周りにねじれるモードを2本の空間曲線が互いに絡み合うモードとして表現する必要があるためである. Cosserat frame はこの新たな幾何的自由度(断面内での回転の自由度)を自然に有する記述法であり, 棒の記述に適している. また, FS座標系は直線を記述するさいに不都合がある(フレネの病理)点でも, 棒の力学とは相性が悪い. これらの詳細および曲線のトポロジー不変量との関連については, たとえば文献13を参照.

*7 断面の慣性主軸を選ぶことで, 弾性エネルギーの表式を曲率の2次形式の標準形にできる.

*8 ここでは, 変形時に棒の断面が中心線 (\hat{d}_3) に対して垂直な配置を維持することが仮定されている (Euler-Bernoulli の仮定, または unshearable rod の仮定). この仮定は実際上, 十分よい精度で実現することが3次元弾性論の枠組みで示せる.

もつ剛体断面のつながりであると考えと(6つの自由度に対応して)「弾性内力の断面にわたる総和」 $F(s)$ と「弾性内力によるモーメントの断面にわたる総和」 $M(s)$ を知れば十分である。^{*9} 棒の各点の力学つりあい(静力学)は、力とモーメントに関するつりあいの式:

$$F'(s) + p(s) = 0, \quad (2)$$

$$M'(s) + \hat{d}_3(s) \times F(s) + q(s) = 0, \quad (3)$$

によって決定される。¹⁴⁾ ここで $p(s)$, $q(s)$ は棒の単位長さあたりに作用する外力と外力によるモーメントである。式(2)および式(3)がKirchhoff rod equationsである。^{*10} これまでの議論から、力学は線形でよかったことを思い出すと、 $M(s) = M_a(s) \hat{d}_a(s)$ の各成分は中心線の曲率と線形に結びつく。ヤング率とポアソン比をそれぞれ E , ν とすると、

$$M_1 = EI_1 \Omega_1, \quad M_2 = EI_2 \Omega_2, \quad M_3 = \frac{2E}{1+\nu} J \Omega_3. \quad (4)$$

となる。これもフック則と呼ぶ。ここで導入した I_1 , I_2 , J は(変形前の)棒断面の形状によって決まる係数である。図1に示す厚さ h , 幅 w のリボンであれば、 \hat{d}_1 と \hat{d}_2 をそれぞれ幅と厚み方向に鉛直にとると $I_1 = hw^3/12$, $I_2 = J = h^3w/12$ となる。³⁾ まとめると、細い棒の静力学は、運動学の式(1)、力とモーメントのつりあい方程式(2), (3)とその境界条件,^{*11} および構成関係式(4)によって完全に記述することができる。

さて、ここまでの議論をエネルギーの観点から整理しておく。 $I_2 = J \sim h^3$ が示すように、薄い断面や細い断面に対して、曲げおよびねじれ弾性率は著しく小さい。一方、中心線が伸縮をうける純粋なひっぱりに対する弾性率は、厚み h に比例する。^{*12} つまり、曲げおよびねじれ変形によるエネルギー増分は h^3 に比例し、ひっぱり・圧縮によるエネルギー増分は h に比例する。したがって、十分薄い(細い)断面($h/L \ll 1$)をもつ棒やリボンでは、中心線の伸縮によるエネルギー増分は、曲げとねじれによるものと比べて十分大きいので、中心線の伸縮は引き起こされず、すべての変形は曲げとねじれによって実現する。¹⁶⁾ すなわち、弾性曲線の全長 L は不変である。そこで、われわれは「中

心線が伸び縮みしない」という拘束条件 $\delta(ds) = 0$ のもとで、方程式(2), (3)の解を求めていく(曲げとねじれの弾性エネルギーを最小化する)。

3. 板はどのように曲がりすべるのか

薄いものは境界条件に応じて様々なかたちをとり、異なるかたちを行き来することで機能を発揮する。本節では、構造同士が摩擦を介して力を及ぼしあう例について紹介する。¹⁷⁾ 植物のつるは風に飛ばされないように近くの棒に巻きつき、¹⁸⁾ ロープは床と接することでとぐろを巻く。「薄いもの同士が力を及ぼし合うと、それらはどのような形をとるのか」という問題を理解するには、物体の弾性と接触面での摩擦が相互作用する現象を考える必要がある。この問題は、基本的に静力学の境界値問題である。しかし、もの同士が摩擦を介して安定化する問題は、通常境界値問題とはすこし異なる趣をもつ。もののかたちは境界条件によって決まるが、境界において作用する摩擦力を知るには、かたちを知る必要がある。つまり、形状と境界条件が同時に無矛盾に決まる問題を扱う必要がある。

このような現象のもっとも基本的な問題として、われわれは図3に示すモデル系を詳しく調べた。自然状態でまっすぐな弾性リボン(薄板)を床(基板)に対して垂直に押しつけると、まず、座屈を起こして左右どちらかに飛び出す(オイラー座屈)。さらに深く押し込むと、下端は滑る(図3(a), (b))。滑る方向は最初にたわんだ方向と逆方向である(湾曲を解消するため)。この現象は、いっけん単純に見える。しかし、「どの程度押し込めばすべるのか」、「どのようにすべるのか」といった問いに答えることは、じつは簡単ではない。というのも、この現象は薄板の弾性、幾何、床とのあいだの摩擦力、そして重力が複雑に絡んだ現象だからである。

板と基板の間の摩擦にはAmontion-Coulomb則を仮定する。基板から板が受ける力のうち、基板に平行な成分と垂直な成分をそれぞれ \mathcal{F}_x と \mathcal{F}_y とする。板は

$$|\mathcal{F}_x| \leq \mu \mathcal{F}_y \quad (5)$$

を満たすとき静止しているが、 $|\mathcal{F}_x| > \mu \mathcal{F}_y$ となるとすべる。

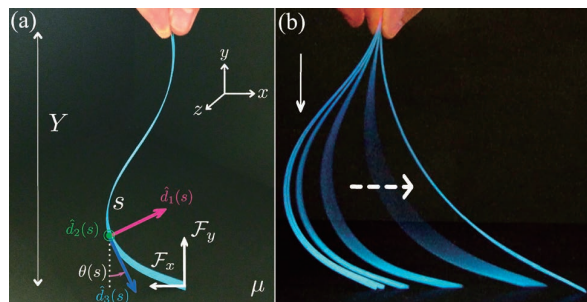


図3 水平な基板に押しつけた弾性リボンのかたちと動き。(a) 座標系と変数の定義。基板から受ける力に依存してリボンの先端はピン留めされるか、基板上を滑る。(b) リボンが滑る瞬間のストロボ写真。

^{*9} 「剛体断面」の仮定は有効な考え方であるが、厳密には正しくない。中心線の変形に伴って、棒の断面は実際には変形する。式(4)中のねじれ剛性率を導くためには、warpingとよばれる断面変形を正しく考慮しなければならない。これは本質的に3次元弾性論の問題であり、その解析はSaint-Venant(サン・ブナン)による。^{3,7)} ひとたび剛性率が正しく与えられれば、断面の剛体回転という描像をもとに弾性曲線の大変形を記述する方程式を正しく導出できる。なお、剛体断面の仮定はしばしばKirchhoff-Loveの仮定と呼ばれるが、実際には、どちらの著者もこのような(不正確な)仮定を置いていない。¹²⁾

^{*10} 細い梁に関するそれまでの困難を一掃するこの理論的枠組みは、Kirchhoffによる1859年の発表当時、相当な議論を巻き起こした。これに続くA. Clebsch, Lord Kelvin, A. E. H. Loveらの研究によってその正しさが実証され、基礎方程式の地位を確立した。¹⁵⁾

^{*11} 棒の両端に $F_{\alpha}(0)$, $M_{\alpha}(0)$ および $F_{\alpha}(L)$, $M_{\alpha}(L)$ が作用しているとすると、 $F(s)$ と $M(s)$ の境界条件は、作用反作用の法則から $F(0) = -F_{\alpha}(0)$, $M(0) = -M_{\alpha}(0)$, $F(L) = F_{\alpha}(L)$, $M(L) = M_{\alpha}(L)$ となる。

^{*12} 断面積に比例するので細いリボンなら Ewh , 半径 a の丸棒なら πa^2 など。

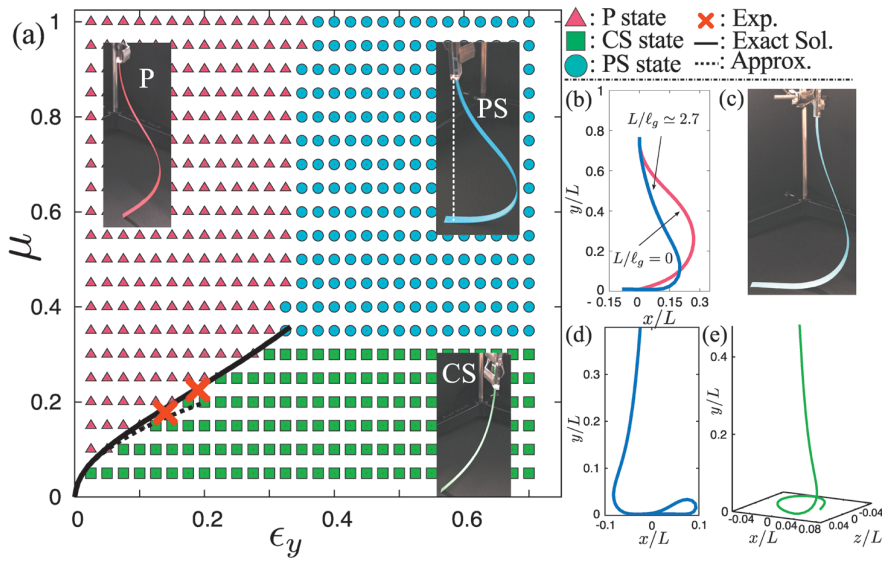


図4 (a) 押し込み程度 ϵ_y と静止摩擦係数 μ を軸として作成したりボンの形態を分類するダイアグラム ($L/l_g=0$)。2点の×印(赤)は実験によって実際に確認したP-CS間の相境界。実線はElasticaの厳密解にもとづく理論曲線、点線は $O(\sqrt{\epsilon_y})$ のその近似解。(b) L/l_g の大小によるリボン形状の比較。 $L/l_g=2.7$ (青) では自重による変形が顕著になる。数値シミュレーションから得られた結果。(c) 自重が支配的な場合の形態は、紙を用いて簡単に再現することができる。数値計算で得られた(d) 折りたたみ状態と(e) コイリング状態。

ここで μ は基板と板の間の最大静止摩擦係数である。つまり「湾曲した板が床をすべるか、すべらないか」は板のかたち自体によって決まることがわかる。

この問題では、リボンを鉛直に配置するので、はじめに重力の影響を正しく評価する必要がある。 g を重力加速度、 ρ を質量密度とすると、板の曲げ弾性力と重力のバランスから

$$\ell_g = \left(\frac{Eh^2}{12\rho g} \right)^{1/3} \quad (6)$$

という特徴的な長さスケールが存在する。¹⁹⁾ ℓ_g は重力長 (gravito-bending length) とよばれ、重力のもとで板がまっすぐを保持できる長さの目安を与える。板の全長が重力長より十分短い場合 $L/\ell_g \ll 1$ は、板は重力によってあまり曲がらないため重力の影響を無視できる。逆に全長が ℓ_g より十分長い場合 $L/\ell_g \gg 1$ は、板は柔らかく自重によって大きく曲がってしまう。

$L/\ell_g \ll 1$ の場合を考えよう。この場合、重力の影響は無視できる。板の下端が基板と接する点および上端の y 座標を、それぞれ $0, Y$ とすると、板のかたちは床との摩擦係数 μ および押し込み程度 $\epsilon_y \equiv 1 - Y/L$ に依存して、3つの状態に分類できる：下端がはじめから動かない「ピン留め (P) 状態」、下端がすべった「完全滑り (CS) 状態」、下端がすべっているが板に変曲点があるため完全にはすべりきっていない「部分滑り (PS) 状態」である (図4(a))。つまり、板のすべり方には「P→CS」と「P→PS」の2パターンがありえる。では、このすべり方の違いはどのようにして生じるのだろうか？ 図3と同様にまっすぐな板を床 (基板) に対して垂直に押しつける。すると板はまず基板と点で接したのち座屈し、P状態をとる。このとき、基盤は板が滑らないよう下端に静止摩擦力 \mathcal{F}_x を及ぼしている。さらに押し込むと基板が与える静止摩擦力は増す。 μ が小さい場合、板を押し込みつけると、摩擦力があるところで最大静止摩擦力 $\mu\mathcal{F}_y$ を超えて板は完全にすべる

(CS)。一方、 μ が大きいと、摩擦力が最大静止摩擦力 $\mu\mathcal{F}_y$ を超える前に板は基板と面で接する。ひとたび面接触が開始すると、接触面積が増えるにつれて法線方向の力が大きくなるため、面接触した状態がより安定になる。そのため、一気にCSへ飛び移る転移は発生しないが、接着面でじわじわと滑る (creep する) ことでPS状態となる。

「P→CS」のシナリオが実現するための条件は、解析的に求めることができる。 s における板の接線ベクトルと y 軸負方向とのなす角を $\theta(s)$ とする (図3(a))。接線ベクトルは $\hat{d}_3(s) = (\sin \theta(s), -\cos \theta(s), 0)$ 、上端の $\mathbf{r}(s=0) = (0, Y, 0)$ での境界条件は $\mathbf{F}(0) = (\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, 0)$ となる。重力は無視できるので ($\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{0}$)、式(2)は $\mathbf{F}(s) = (\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, 0)$ と積分できる。この結果を式(3)に代入する。平面的な曲げ変形を考えるので、構成方程式は $\mathbf{M} = EI_2 \theta'(s) \hat{z}$ 。これより、 $\theta(s)$ の満たすべき方程式：

$$EI_2 \theta''(s) = -\mathcal{F}_x \cos \theta(s) - \mathcal{F}_y \sin \theta(s). \quad (7)$$

を得る。これはElastica^{*13}の方程式と呼ばれる。ここで \mathcal{F}_x と \mathcal{F}_y は板の下端位置に関する条件から ϵ_y の関数として決定される。P-CS間の相境界はElasticaの厳密解を用いて、条件 $\mu_c = \mu_c(\epsilon_y) = |\mathcal{F}_x|/\mathcal{F}_y$ から決定される (図4(a)の実線)。

では、自重によって大きくたわむような板が床に押しつけられると、どのようにふるまうのだろうか？ 板が受ける重力と曲げ弾性力が同程度 ($L/\ell_g \approx 1$) の場合、自重で垂れ下がるため、床と側面で接触してP状態は消失してPS状態になる (図4(b), (c))。重力が曲げ弾性力をさらに大きく上回ると ($L/\ell_g \gg 1$)、折り畳まれたかたちが観測される (図4(d))。これはとぐろを巻いたロープ (図4(e)) の平面版に相当する。柔らかいシートまたは棒を床に垂らせば、容易に側面で接する。側面での接触は物体を滑りにくくさせるため、板や棒は床と接触した領域にたまりつづけ、滑

*13 Elasticaとはラテン語で「薄い板」の意味。 s を時間とみなすと、方程式(7)は単振り子の方程式と等価である。

りに対してより安定な構造になる。このようにして、床に落ちたロープはコイリングを始めるのである。

本節では、薄い板が摩擦によってさまざまな形態をとりうることを概観した。これらのかたちは、弾性、幾何、摩擦、さらには重力が複雑に絡みあって現れる、しなやかな構造の一例である。本節でとり扱った基本的な問題に加えて、くせ（自発曲率）やねじれの効果、床との表面化学的な相互作用をとり入れることで、植物の根や茎の成長、ヤモリの足の表面の摩擦のしくみ、などの理解に役立つ知見が得られると期待される。

4. すばやさを生み出す

薄い構造は、動的な機能も創発する。本節では、「飛び移り座屈」(スナップ)と呼ばれる現象に焦点をあてる。平らな板を両側から圧縮すると、板はたわむ(オイラー座屈)。すなわち、板は上下どちらかの方向に湾曲する。つぎに、両端からの圧縮力を維持したまま、その湾曲した部分を中央部へ押し戻すように外力を加えていくと、あるところで湾曲方向が逆転し、反対側の座屈形状へスナップする。つまり、飛び移り座屈とは、座屈した板が「裏返し」、座屈の方向が反転する現象のことである。飛び移り座屈は、薄い構造が普遍的に示すスイッチング現象である。このことから、ソフトロボティクスでの応用や、昆虫の翅の展開と収納、植物がすばやく動くための仕組みとして、スナップは近年大きな注目を集めている。²⁰⁻²²⁾ 食虫植物のハエトリグサやジャンピングポッパーと呼ばれるおもちゃなどが、スナップの身近な例としてあげられる(図5(a), (b))。

前節と同じセットアップで、今度はスナップを起こしてみよう(図6(a))。薄い弾性板を鉛直に配置し、上端にはclamp(はめ込み)、下端にはhinge(蝶番)の境界条件を設定する。つまり、下の境界条件は回転を許し、上のそれは回転を許さない。このように、板の両端で異なる(非対称な)境界条件を課したうえで、高さ Y を固定したまま、水平位置 X を変化させる。座屈して左側に湾曲した板の上端を右側に動かしていくと、あるところでパチンと音を立てて座屈の向きが逆転(スナップ)する(図6(b))。われわれは実験、数値シミュレーション、Elasticaの厳密解を組みあわせ、この飛び移り座屈の性質を詳細に調べた。^{23), *14}

板の下端に作用する力の水平成分 F_x を、境界の相対変位 X の関数として測定した結果を、図7に示す。ここで、力と水平位置は $f_\alpha \equiv F_\alpha L^2/EI_2$ ($\alpha=x, y$)、 $\epsilon_x = X/L$ と無次元化している。図7をみると、非常に単純な設定であるにもかかわらず、この系はたいへん興味深い力学応答を示すことがわかる。 $\epsilon_x=0$ のとき(図7(b))、下端はhingeによって左向きに押されている： $f_x < 0$ 。 ϵ_x を増やし、上端を右方向に動かすと、 f_x の絶対値が減少し、 f_x の符号が変わる。しかし、ここではスナップせず、図7(c)のような形になる。

*14 方程式(2), (3)の右辺に適切な慣性項を追加することで、棒の完全な運動方程式を得ることができる。^{12, 14)}

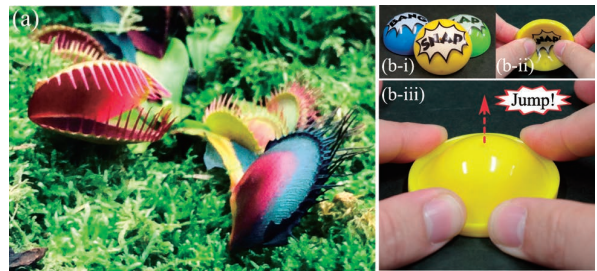


図5 (a) 食虫植物「ハエトリグサ」の写真。筆者(佐野)がイギリス王室植物園キューガーデンにて撮影。(b-i) ジャンピングポッパーの写真。筆者(佐野)がハーバード大学滞在時に研究室の同僚から饒別の品として送られた品。ポッパーを(b-ii)のように裏返して置くと、ポッパーはもとの曲率に戻ろうとする力を利用して飛び跳ねる(b-iii)。

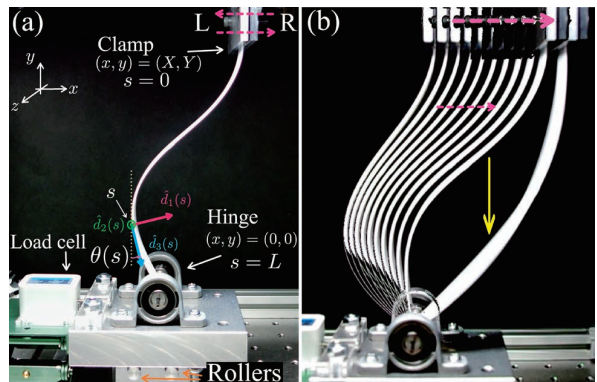


図6 非対称に拘束した弾性板の実験写真。(a) 実験装置と変数の定義。板を左側に座屈させておき、クランプした上端を右に動かすと、あるところで飛び移り座屈が発生する。その後、上端を左に動かしてもとの位置に戻す。(b) スナップのストロボ写真。点線は運動の方向を表す。

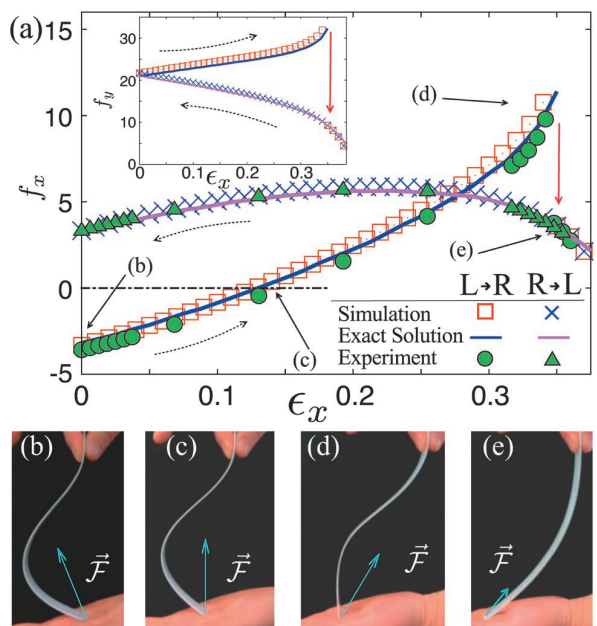


図7 応力ひずみ関係式と対応する板の座屈形状。(a) 実験と厳密解と数値計算によって得られた応力ひずみ曲線($\epsilon_y \approx 0.1$)。メインの図は無次元化した x 方向の力。差込図は y 方向の力を表す。点線の矢印は運動の方向を表す。(b)-(e) は(a)で見られる板の典型的なかたちの再現。上端を指で挟み、下端を手のひらで支えることで上下の非対称性を再現している。

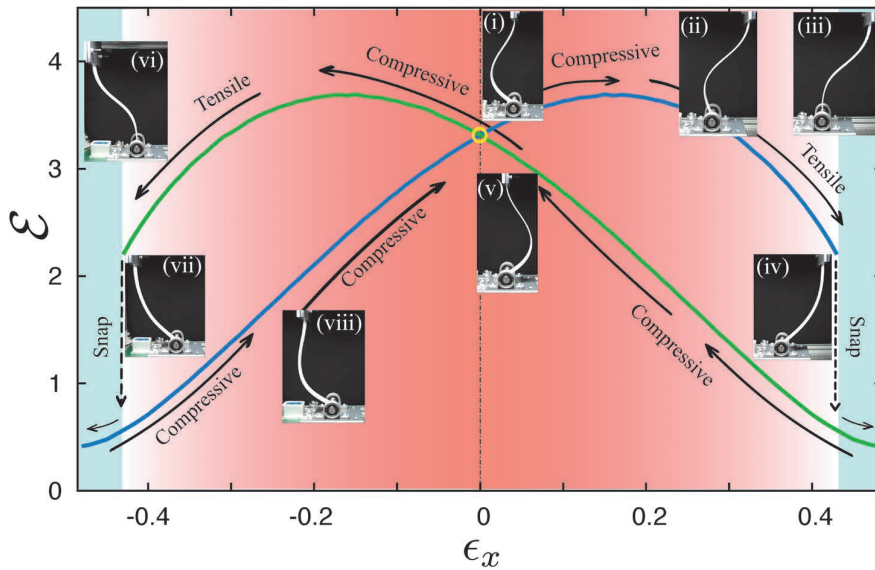


図8 弾性エネルギーのランドスケープと対応する板の形状。厳密解にもとづいて計算した弾性エネルギーを ϵ_x の関数としてプロットしている ($\epsilon_y=0.16$)。黒色の矢印は実験の順序を表す。また赤色の領域は板のかたちに変曲点が存在する双安定な領域、青色の領域は単安定な領域を表す。

さらに ϵ_x を増加させると、連続的に f_x が増加していく。そして、板の下端が底に対して垂直になると、板はスナップし、力は不連続かつ大幅に減少する(図7(d), (e))。スナップ後に上端を逆向きに移動させると、座屈の方向が反転しているため、スナップ前とはちがう(履歴依存的な)応答を示す。 $\epsilon_x=0$ まで戻すと、スナップ前後で板のかたちは左右反転しており、 f_x は大きさが同じで逆向きである。

ここに述べた板のスナップ的ふるまいは、弾性曲線の厳密解によって定量的に予測することができる。式(7)を、前節とは異なる境界条件 $\epsilon_x \neq 0$ のもとで解くと、最終的に図7(a)に示す実線がえられる。Elasticaの研究の歴史は非常に長いが、われわれの知るかぎり、この厳密解の解析的表示を得たのはわれわれが初めてである。スナップが起こる臨界ひずみを ϵ_x^* とすると、厳密解は2種類に分類される。 $|\epsilon_x| \leq \epsilon_x^*$ の場合、板のかたちは変曲点をもつため、板の座屈には2つの取りうる方向がある。一方で $|\epsilon_x| \geq \epsilon_x^*$ の場合、板には変曲点がなく座屈の方向はひとつしかない。したがって、 $|\epsilon_x|$ を増やすと、幾何学的条件によって飛び移り座屈が起きる。このエキゾチックな力学的ふるまいは、弾性エネルギーランドスケープをみるとよりはっきりと理解できる。無次元化した板の弾性エネルギー ϵ を ϵ_x の関数として示したのが、図8である。 $|\epsilon_x| \leq \epsilon_x^* \approx 0.43$ の領域では、とりうる状態が2つあるが、 $|\epsilon_x| \geq \epsilon_x^*$ ではひとつの状態しかとれない。すなわち、この転移は、サドルノード分岐に分類される。

本節で紹介した飛び移り座屈の履歴依存的なふるまいが、たった一枚の平らな板に内在しているという事実は注目に値する。板のすばやい動きは、破壊や塑性変形とは異なり、 ϵ_x を制御することでくり返し何度でもとり出すことができる。近年、自然界には存在しない力学特性をそなえた材質をいかにデザインするかという問いがなされており、そのような材質は「力学的メタマテリアル」(mechanical metamaterial) と総称される。力学的メタマテリアルは、境界に

のみ金属状態が現れる絶縁体であるトポロジカル絶縁体に着想を得ている。²⁴⁾ たとえば、マイクロ3Dプリンターで内部に特定の機構(mechanism)をもつ微小素子を多数作成し、それらを積みあげることで、巨視的には自然界の物質にはありえないふるまいを示す機能性の固体をつくりだすことができる。^{*15} 今回、われわれが調べた系では、あらかじめ板にあたる ϵ_y というパラメータひとつで、スナップ転移や奇妙な力学応答を自在に制御することができる。そこで、まっすぐな板や棒を非対称に拘束したものを「部品」とした力学的メタマテリアルのデザインを考えることは、今後の興味深い展開のひとつになると期待される。

5. おわりに

350年以上前、イギリスの自然哲学者R. Hookeは「伸びとともに、力あり」(As the extension, so the force.)と述べた。^{25, 26)} G. Galileiが、材料の強さを知ろうとして行った研究から始まった力学分野¹⁵⁾、^{*16}は、今日では完成された古典的学問という印象がある。しかし、近年のデジタル加工技術の急速な発展と普及に後押しされて、力学は魅力的な最先端分野として鮮やかに現代に甦った。今日、力学の研究では力学的メタマテリアルをはじめとして、新しい概念が次々と生み出されている。中心的な概念の幾つかは、その起源を1864年のJ. Clerk Maxwellによる構造力学の研究にまで遡る。²⁷⁾ 過去数年間で、このいわゆるMaxwell

^{*15} 弾性体を一方向に引きのばしたり圧縮したりすると、それと垂直な方向に縮んだり膨らんだりする。物体が力を加えた方向と垂直な方向に相対的にどの程度ひずむのかを表す量をポアソン比と呼ぶ。通常の物体では、ポアソン比は正である。これは、物体の体積は多少なれ保存するという事実のためである。ただし、理論上は負になることも許される。くしゃくしゃに丸まった紙を広げると、垂直方向にも広がるため、(広い意味での)ポアソン比は負である。構造を適切にデザインすれば、広義のポアソン比を自在に制御できる力学的メタマテリアルを作成することができる。

^{*16} Leonardo da Vinciの未発表のノートには、構造の静力学に関する数学的考察と材料の強さを決定するための実験結果が記載されている。GalileiはCardanの著作を通じてda Vinciの研究を知ったと考えられている。¹⁵⁾

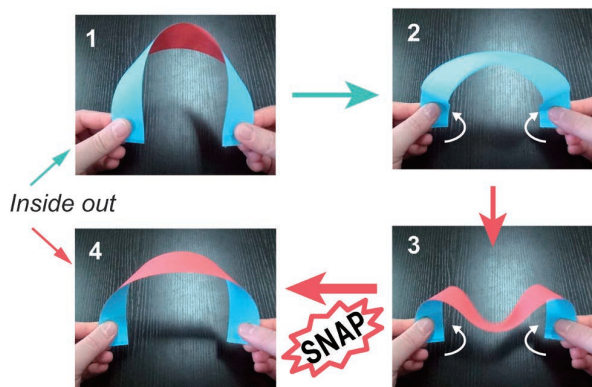


図9 ねじれによる不安定性を用いた飛び移り座屈の再現実験。

frameと広範囲のネットワーク的な力学モデル(高密度粉体のジャミング転移点近傍における応力ネットワーク,²⁸⁾ アロステリック効果を生み出すタンパク質構造,²⁹⁾ 折り紙の収納展開^{9,30,31)}など)との深い関連性が明らかになってきた。これらの展開は、物理学の幅広い領域において力学の概念がその根底を支えていることを、私たちに思い出させてくれる。

さいごに、概要で述べたリボンの飛び移り座屈について簡単に紹介して本稿を結ぶことにする。紙やプラスチック薄膜をリボン状に切り出し、これを半円をなすように拘束してから、両端を(リボンの長軸の向きに対して)同じ方向に回転させていく(図9)。すると、リボンははじめ面外へたわむように変形するが、そのあと跳ねかえり、パチンという音とともに表と裏が反転して半円の配置に戻る。この反転現象は、4節で紹介したスナップの一種であるが、ねじりを伴った3次元的動きが生じるため、他の研究例よりも非自明で興味深い性質をもつ。リボンのねじりスナップ現象は、曲げとねじれの幾何的な結合をうまく利用しているので、両端の境界条件を調整するだけで、蓄えた弾性変形エネルギーを、思いどおりのタイミングで一気に運動エネルギーに変換することができる。³²⁾ しかも、このねじれによるスナップは、繰り返し何度でも行うことができる。これは、応用を考えるうえでも好ましい性質である。しかしなにより、こういった機能を掌のうでで容易に実現できることが、力学分野の魅力のひとつだといえる。³³⁻³⁵⁾ かたちはしなやかさとともにある。身のまわりにある薄いものを手にとってみよう、きっとその面白さに出会えるに違いない。

本稿の内容の一部は九州大学の山口哲生氏との共同研究および多くの方々との議論(とくに田中良巳、山口哲生、谷茉莉、松本大地、米田大樹の各氏(敬称略))にもとづいており、ここに感謝を申し上げます。

参考文献

- 1) J. E. Gordon, *Structures: or Why things don't fall down* (Da Capo Press, Cambridge, 2003) 2nd ed.
- 2) D. Bigoni, *Extremely Deformable Structures* (CISM Lecture Notes No. 562,

解説 しなやかさとともに、かたちあり

- Springer, 2015).
- 3) B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry* (Oxford Univ. Press, 2010).
- 4) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, 1980).
- 5) C. R. Calladine, *Theory of Shell Structure* (Cambridge Univ. Press, 1983).
- 6) S. Vogel, *Comparative Biomechanics* (Princeton Univ. Press, 2013).
- 7) 佐野 理, 『連続体の力学』(基礎物理学選書26, 裳華房, 2000).
- 8) P. M. Reis, *J. Appl. Mech.* **82**, 111001 (2015).
- 9) K. Bertoldi et al., *Nat. Rev. Mater.* **2**, 17066 (2017).
- 10) D. P. Holmes, *Curr. Opin. Colloid. Interface Sci.* **40**, 118 (2019).
- 11) T. R. Powers, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1607 (2010).
- 12) E. H. Dill, *Arch. Hist. Exact Sci.* **44**, 1 (1992).
- 13) R. D. Kamien, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 953 (2002).
- 14) 導出はサブメンタルマテリアルを参照。
- 15) S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials* (Dover, New York, 2000).
- 16) L. Rayleigh, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **45**, 105 (1888).
- 17) T. G. Sano, T. Yamaguchi, and H. Wada, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 178001 (2017).
- 18) C. Darwin, *The Movements and Habits of Climbing Plants* (Cambridge Univ. Press, 2009).
- 19) C. Y. Wang, *Int. J. Mech. Sci.* **28**, 549 (1986).
- 20) Y. Forterre et al., *Nature* **433**, 421 (2005).
- 21) A. Pandey et al., *Europhys. Lett.* **105**, 24001 (2014).
- 22) K. Saito et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **114**, 5624 (2017).
- 23) T. G. Sano and H. Wada, *Phys. Rev. E* **97**, 013002 (2018).
- 24) S. D. Huber, *Nat. Phys.* **12**, 621 (2016).
- 25) C. Coulais, *Science* **358**, 6366 (2017).
- 26) R. Levien, *The Elastica: A Mathematical History* (EECS Department, Univ. of California, Berkeley, 2008).
- 27) J. C. Maxwell, *Philos. Mag.* **27**, 294 (1864).
- 28) T. C. Lubensky et al., *Rep. Prog. Phys.* **78**, 073901 (2015).
- 29) J. W. Rocks et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **114**, 2520 (2017).
- 30) K. Miura, *Inst. Space Astronaut. Sci. Rep.* **618**, 1 (1985).
- 31) V. Brunck et al., *Phys. Rev. E* **93**, 033005 (2016).
- 32) T. G. Sano and H. Wada, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 114301 (2019).
- 33) Y. Morigaki, H. Wada, and Y. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 198003 (2016).
- 34) D. Matsumoto, T. G. Sano, and H. Wada, *Europhys. Lett.* **123**, 14001 (2018).
- 35) T. Yoneda, D. Matsumoto, and H. Wada, *Phys. Rev. E* **100**, 013003 (2019).

著者紹介

佐野友彦氏: 日本学術振興会海外特別研究員。専門は構造力学、連続体力学、統計物理。構造と幾何における機能性を理論と実験の両面から研究している。

和田浩史氏: 専門は、マクロな自然現象の物理学。

(2019年4月25日原稿受付)

Mechanical Origin of Flexibility and Functionality in Slender Structures

Tomohiko G Sano and Hirofumi Wada

abstract: Thin structures and slender structures span more than ten orders of magnitude in scale; the examples include arches, buildings, toys, plants, and, down to micro-scales, membranes, flagella and cilia. Although the solid mechanics to describe such structures has a long history of studies over a few centuries, its new paradigm relevant to form, geometry and functionality is currently growing in physics communities. In this article, we review a modern framework for mechanics of slender structures and recent advances, highlighting the underlying common themes in seemingly disparate fields in physics.

本記事では、マイページにおいてサブメンタルマテリアルを掲載しています。